PART3 1次不定方程式とユークリッドの互除法

要点① 1次不定方程式の整数解と互除法

35と29の最大公約数を互除法で求めると

$35=29\cdot1+\quad$ …… ①

$\quad=\quad\cdot4+\quad$ …… ②

$\quad=\quad\cdot1+\quad$ …… ③

$\quad=\quad\cdot5+0$ …… ④

よって，35と29の最大公約数は1であり，35と29は互いに素である。

ここで，①～③を，それぞれの式における余りに注目して変形すると

③より　$1=6-5\cdot1$ …… ③′

②より　$5=$ 　　　　 …… ②′

①より　　　　　　　 …… ①′

③′に②′を代入して整理し，さらに①′を代入して整理すると

$1=6-5\cdot1$

$=6-(29-6\cdot4)\cdot1$

$=6-29\cdot1+6\cdot4$

$=6\cdot5-29\cdot1$

$=(35-29\cdot1)\cdot5-29\cdot1$

$=35\cdot5-29\cdot5-29\cdot1$

$=35\cdot5+29\cdot(-6)$

つまり，$35\cdot5+29\cdot(-6)=1$ と変形することができる。

これは，方程式 $35x+29y=1$ の解の1つが $x=5$，$y=-6$ であることを表している。

よって，1次不定方程式 $35x+29y=1$ の整数解の1つ(特殊解)は，上記のように35と29に互除法を用いることで求めることができる。

一般に，1次不定方程式 $ax+by=c$ (a，b は互いに素)の整数解の1つは，a と b に互除法を用いることで求めることができる。

[MEMO]

3 次の方程式の整数解の１つを，互除法を用いて求めよ。

$42x+29y=1$

Point Pickup

１次不定方程式 $ax+by=1$ の整数解と互除法

１次不定方程式 $ax+by=1$ の整数解の１つ(特殊解)が見つからないときは，a と b に互除法を用いる方法がある。

第11講 PART3 確認問題

1 方程式 $58x-17y=1$ の整数解の1つを，［　　］内の計算式を利用し，互除法を用いて求めよ。

$58=17\times3+7$
$17=7\times2+3$
⋮

整数解：$x=$［ア］，$y=$［イウ］

PART3 1次不定方程式とユークリッドの互除法

3 次の方程式の整数解の1つを，互除法を用いて求めよ。

$$42x+29y=1$$

[解答]

42と29に互除法を用いると

$42=29\cdot1+13$ …… ①

$29=13\cdot2+3$ …… ②

$13=3\cdot4+1$ …… ③

③より　$1=13-3\cdot4$ …… ③′

②より　$3=29-13\cdot2$ …… ②′

①より　$13=42-29\cdot1$ …… ①′

③′ に ②′ を代入して整理し，さらに ①′ を代入して整理すると

$$\begin{aligned}1&=13-3\cdot4\\&=13-(29-13\cdot2)\cdot4\\&=13-29\cdot4+13\cdot8\\&=13\cdot9-29\cdot4\\&=(42-29\cdot1)\cdot9-29\cdot4\\&=42\cdot9-29\cdot9-29\cdot4\\&=42\cdot9+29\cdot(-13)\end{aligned}$$

よって，$42\cdot9+29\cdot(-13)=1$ より，方程式 $42x+29y=1$ の整数解の1つは

$x=9$，$y=-13$

第11講　PART3 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：5，イウ：17

[解説]

58 と 17 に互除法を用いると，[A]

$58=17\times3+7$　……①

$17=7\times2+3$　……②

$7=3\times2+1$　……③

③より，$1=7-3\times2$　……③′

②より，$3=17-7\times2$　……②′

①より，$7=58-17\times3$　……①′

③′ に②′ を代入して整理し，さらに①′ を代入して整理すると，

$1=7-3\times2$

$=7-(17-7\times2)\times2$

$=7\times5-17\times2$ [B]

$=(58-17\times3)\times5-17\times2$

$=58\times5-17\times17$ [C]

よって，$58\times5-17\times17=1$

すなわち，方程式 $58x-17y=1$ の整数解の 1 つは，

$\boldsymbol{x=5,\ y=17}$

[A]　1 次不定方程式 $ax+by=1$ の整数解の 1 つ（特殊解）が見つからないときは，a と b に互除法を用いる方法がある。

[B]　$7\times\square-17\times\square$ の形に変形する。

[C]　$58\times\square-17\times\square$ の形に変形する。